-29-

(4T')

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA PRO (*) (konvergenční kritérium)

APROXIMAČNÍ PODMÍNKA

nechť existuje konstanta $c_1 > 0$ taková, že

((AP)) $$(Q_i v, v)_{A_i} \le c_1 \, \|A_i v\|_i^2 / \lambda_i^* \qquad \forall v \in V_i ,$$

kde λ_i^* je buď největší vl. číslo A_i, nebo nějaká vhodná horní mez (podle kontextu)

(když zhoršíme odhad, zhorší se c_1)

ZHLAZOVACÍ PODMÍNKA ('smoothing assumption')

nechť existuje konstanta $c_2 > 0$ taková, že

((ZP)) $$\|A_i S_i v\|_i^2 / \lambda_i^* \le c_2 \left(\|v\|_{A_i}^2 - \|S_i v\|_{A_i}^2 \right) \qquad \forall v \in V_i$$

LEMMA: Za předpokladů (1), (2), (4) implikují "(AP) + (ZP) => (*)" s konstantou $c^* = (c_1 c_2)^{-1}$.

Důkaz:

Protože Q_i je projekce a samoadjungovaný vzhledem k $(\cdot,\cdot)_{A_i}$

$$(Q_i v, v)_{A_i} = (Q_i^2 v, v)_{A_i} = (Q_i v, Q_i v)_{A_i} = \|Q_i v\|_{A_i}^2$$

Za ~~v~~ v (AP) dosadíme $S_i v$. Pak

$$(Q_i S_i v, S_i v)_{A_i} = \|Q_i S_i v\|_{A_i}^2 \overset{(AP)}{\le} c_1 \|A_i S_i v\|_i^2 / \lambda_i^* \overset{(ZP)}{\le}$$

$$\le c_1 c_2 \left(\|v\|_{A_i}^2 - \|S_i v\|_{A_i}^2 \right),$$

a tedy dostáváme (*) $\square$

(1T')

SPLNĚNÍ ZHLAZOVACÍ PODMÍNKY (ZP) PRO "STACIONÁRNÍ ZHLAZOVAČ"

Nechť $D_{i,l}^{PRE} = D_{i,j}^{POST} = D_i \qquad l=1,\dots,m_1,\ j=1,\dots,m_2=m_1, \quad \forall i$:

Pak lze (ZP) formulovat pro jednu iteraci zhlazovače:

definujme $K_i = I - D_i A_i$. Pak $J_i = K_i^m$

Nechť existuje $c_3>0$ takové, že

(ZP2) $\qquad \|A_i r\|_i^2/\lambda_i^* \le c_3\,((I-K_i)r,r)_{A_i} \quad \forall r \in h_i$

LEMMA: Nechť platí (1) a (ZP2). Nechť K_i jsou symetrické, nezáporné ve sk. součinu $(\cdot,\cdot)_{A_i}$ a $\|K_i\|_{A_i} \le 1$.
Potom (ZP) platí s konstantou $c_2 = c_3/m$.

[BRAMBLE & PASCIAK, 1987, str. 316]

Důkaz

$$((I-K_i)K_i^{2m} r, r)_{A_i} \le \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1}((I-K_i)K_i^j r, r)_{A_i} =$$

$$= \frac{1}{2m}((I-K_i^{2m})r,r)_{A_i}$$

rozepíšu sumu a odečte se vše až na první a poslední člen

Upravím obě strany a použiji $K_i^m = J_i$

$$((I-K_i)J_i r, J_i r)_{A_i} \le \frac{1}{2m}\left(\|r\|_{A_i}^2 - \|J_i r\|_{A_i}^2\right)$$

dosadíme $J_i r$ za r v (ZP2) a kombinujeme

$$\|A_i J_i r\|_i^2/\lambda_i^* \le c_3((I-K_i)J_i r, J_i r) \le \frac{c_3}{2m}\left(\|r\|_{A_i}^2 - \|J_i r\|_{A_i}^2\right)$$

□

KONVERGENCE MG V OBECNÉM PŘÍPADĚ

Předpokládejme:

((OP1)) A_i jsou regulární, $i=0,1,\dots,\ell$

((OP2)) $I_{i-1}^{i} = (R_i^{i-1})^*$

A_i nejsou SPD $\Rightarrow$ neindukují normu $\Rightarrow$ budeme pracovat s

$$\|u\|_i = (u,u)_i^{1/2} \qquad i=0,1,\dots,\ell$$

Připomeneme normu operátoru

$$\|A_i\|_i = \sup_{u\in \mathcal{H}_i\setminus\{0\}} \frac{\|A_i u\|_i}{\|u\|_i}$$

Podmínky na vyhlazování a hrubou síť:

((OP3)) $\|S_i\|_i \le c_S \quad \forall i=1,\dots,\ell$

((OP4)) $\underline{c}_I \|I_{i-1}^{i} u\|_i \le \|u\|_{i-1} \le \overline{c}_I \|I_{i-1}^{i} u\|_i \quad \forall u\in \mathcal{H}_{i-1}, \; i=1,2,\dots,\ell$

jak dobře tohle aproximuje A_i^{-1}

((OP5)) $\|A_i^{-1} - I_{i-1}^{i} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1}\|_i \cdot \|A_i S_i\|_i \le \eta(m) \quad \forall i=1,\dots,\ell,$

kde $\eta(m)$ nezávisí na i a $\to 0$ pro $m\to\infty$

Předpokládáme, že $m=m_1$ a $m_2=0$!

Místo (OP5) lze alternativně uvažovat

((OP5a)) $\|(A_i^{-1} - I_{i-1}^{i} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1}) A_i S_i\|_i \le \eta(m) \quad \forall i=1,\dots,\ell$

VĚTA (o konvergenci W-cyklu v obecném případě)

Nechť platí (OP1) – (OP5) (příp. (OP5a)) pro MG$_i$ - multigrid a volbu $\gamma=2$, $m_1=m$, $m_2=0$. Potom pro libovolné $\xi\in(0,1)$ existuje m_0 takové, že $\forall m\ge m_0$

((☆)) $\|B_i\|_i \le \xi \quad \forall i=0,1,\dots,\ell$.

DŮKAZ:

Položme $\quad c_B := \underline{c}_I^{-1}\left(\bar{c}_I(1+c_S)\right)$,

$$\rho_* := \min\left(\rho, \frac{1}{2c_B}\right)$$

Zvolme m_0 tak, že $\forall m \ge m_0 \quad \eta(m) \le \rho_*/2$.

Potom

$$\eta(m) + \rho_*^2 c_B \le \rho_* .$$

$$\eta(m) + \rho_*^2 c_B \le \rho_*\left(1/2 + \rho_* c_B\right) \le \rho_*\left(1/2 + 1/2\right) \quad ✓$$

Budeme postupovat indukcí.

$B_0 = 0$ ✓

Nechť (☆) platí pro B_{i-1}. ale s konstantou ρ_*!

Ukážeme, že $\forall m \ge m_0$

$$(B_i v, w)_i \le \rho_* \|v\|_i \|w\|_i \qquad v, w \in V_i$$

Dosaďme tam B_i (přip. nemáme post-smoothing)

$$(B_i v, w) = \left(\left(I - I_{i-1}^i (I - B_{i-1}^2) A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i\right) S_i v, w\right)_i$$

$$= \left(\left(I - I_{i-1}^i A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i\right) S_i v, w\right)_i +$$

$$+ \left(I_{i-1}^i B_{i-1}^2 A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i S_i v, w\right)_i \le$$

$$\le \|A_i^{-1} - I_{i-1}^i A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1}\|_i \, \|A_i S_i\|_i \, \|v\|_i \|w\|_i +$$

$$+ \|I_{i-1}^i B_{i-1}^2 A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i S_i v\|_i \cdot \|w\|_i \le$$

(OBT), příp. (OBSa)   indukční předp.

$$\le \eta(m) \cdot \|v\|_i \|w\|_i + \underline{c}_I^{-1} \rho_*^2 \|A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i S_i v\|_{i-1} \cdot \|w\|_i$$

Zbývá odhadnout

$$\|A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i S_i v\|_{i-1} \le \bar{c}_I\left(\|(I - I_{i-1}^i A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i) S_i v\|_i + \|S_i v\|_i\right) \le$$

$$\le \left(\bar{c}_I\left(\eta(m) + c_S\right)\right) \cdot \|v\|_i$$

tady má asi Shaidurov chybu

Dohromady

$$(D_i v, w)_i \leq \left[\eta(m) + \rho_*^2 \, c_I^{-1}\left(\bar{c}_I\left(\eta(m) + c_J\right)\right)\right] \|v\|_i \, \|w\|_i$$

Protože $\eta(m) \leq \rho_*/2 < 1$ $\left(\rho \in (0,1) \text{ a } \rho_* \leq \rho\right)$,

$$c_I^{-1}\left(\overset{c_I}{\bar{c}_I}\left(\eta(m) + c_J\right)\right) \leq c_I^{-1}\left(\bar{c}_I + c_J\right) = c_D$$

$$\Rightarrow (D_i v, w)_i \leq \eta(m) + \rho_*^2 \, c_D \overset{\|v\|_i \, \|w\|_i}{\vee} \leq \rho_* \cdot \|v\|_i \, \|w\|_i$$

Když položíme $w = D_i v$, dostáváme

$$\|D_i v\|_i \leq \rho_* \|v\|_i \leq \rho \|v\|_i \qquad \square$$