KONVERGENCE TMG V SYMETRICKÉM PŘÍPADĚ

Symetrický TMG lze použít jako předpodmínění pro CG

BUDEME PŘEDPOKLÁDAT:

((1)) A_i jsou SPD

((2)) $I_{i-1}^{i} = (R_i^{i-1})^*$

((3)) $J_i^{(m_1)} = \left(J_i^{(m_2)}\right)^*$ ve smyslu sk. součinu $(\cdot,\cdot)_i$ na $\mathcal{H}_i$

((4)) $A_{i-1} = R_i^{i-1} A_i I_{i-1}^{i}$

((5)) $J_i A_i = A_i J_i$ pro $J_i = J_i^{(m_1)}$

(pozn. z (5) $\Rightarrow$ $J_i^* A_i = A_i J_i^*$)

ZADEFINUJEME A_i-skalární součin a normu

- $(u,v)_{A_i} = (A_i u, v)_i \quad \forall u,v \in \mathcal{H}_i$

$\|u\|_{A_i} = (u,u)_{A_i}^{1/2}, \quad \|u\|_i = (u,u)_i^{1/2}$

OPERÁTOR KOREKCE (PŘESNÉ) NA HRUBÉ SÍTI

$Q_i : u \mapsto v \, ;$

$$v = u - I_{i-1}^{i} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i u$$

$$Q_i = I - I_{i-1}^{i} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i$$

LEMMA (vlastnosti Q_i)

Za předpokladů (1), (2), (4) je Q_i samoadjungovaný projektor z $\mathcal{H}_i$ na ortogonální doplněk $I_{i-1}^{i} \mathcal{H}_{i-1}$ ($\in \mathcal{H}_i$) vzhledem ke sk. součinu $(\cdot,\cdot)_{A_i}$.

./.

Důkaz:

Nechť $w = Q_i u$; ukážeme, že $(w, r)_{A_i} = 0 \quad \forall r \in I^i_{i-1} \mathcal{M}_i$

$$(A_i w, r)_i = (A_i Q_i u, r)_i \overset{r = I^i_{i-1} y}{=} (A_i Q_i u, I^i_{i-1} y)_i =$$

$$= (u, A_i I^i_{i-1} y)_i - (\underbrace{(R_i^{i-1} A_i I^i_{i-1})}_{= A_{i-1}} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i u, y)_i =$$

$$= (R_i^{i-1} A_i u, y)_i - (R_i^{i-1} A_i u, y)_i = 0$$

Q_i je projekce (viděli jsme už dříve)

$$Q_i^2 = (I - 2 I^i_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i + I_{i-1} A_{i-1}^{-1} \underbrace{R_i^{i-1} A_i I^i_{i-1}} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i) =$$

$$= I - I^i_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i$$

Samoadjungovanost Q_i

$$(Q_i u, v)_{A_i} = (A_i (I - I^i_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i) u, v)_i =$$

$$= (A_i u, v)_i - (A_i u, I^i_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i v)_i$$

$$= (u, Q_i v)_{A_i} \quad \checkmark$$

KONVERGENČNÍ KRITÉRIUM (postačující podmínka)

Nechť $\exists\, c^* > 0$ tak, že $\forall i = 1, \dots, k, \ \forall v \in \mathcal{M}_i$

$$((*)) \qquad \|v\|^2_{A_i} - \|S_i v\|^2_{A_i} \geq c^* \|Q_i S_i v\|^2_{A_i}$$

VĚTA o konvergenci symetrické varianty MG

Nechť platí (1)-(5) a kritérium (6) pro MG_i algoritmus s $\gamma = 1$.

Pak

$$\|B_i\|_{A_i} = \sup_{v \in \mathcal{M}_i \setminus \{0\}} \|B_i v\|_{A_i} / \|v\|_{A_i} \leq \frac{1}{1 + c_*} \ (< 1).$$

Důkaz:

KROK 1 - operátory B_i jsou samoadjungované vzhledem k $(\cdot,\cdot)_{A_i}$, což dokážeme indukcí (v i)

$B_0 = 0$ ✓

Nechť B_{i-1} je samoadjungovaný vzhledem k $(\cdot,\cdot)_{A_i}$.

Pro libovolné $v, w \in V_i$ máme

$$(B_i v, w)_{A_i} = (A_i J_i^* (I - I_{i-1}^i (I - B_{i-1}) A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i) J_i v, w)_i =$$

$$= (A_i J_i^* J_i v, w)_i - (A_i J_i^* I_{i-1}^i A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i v, w)_i + (A_i J_i^* \underset{I_{i-1}^i}{\wedge} B_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i v, w)_i$$

$A_i J_i^* = J_i^* A_i$

$$= (A_i J_i v, J_i w)_i - (\overbrace{A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1}}^{②} A_i J_i v, R_i^{i-1} A_i J_i w)_i + (B_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i v, R_i^{i-1} A_i J_i w)_i =$$

v „původní" B_i si půjčíme a matici A_{i-1} do sk. součinu

$$= (A_i v, J_i^* (I - I_{i-1}^i (I - B_{i-1}) A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i) J_i w)_i =$$

$$= (A_i v, B_i w)_i = (v, B_i w)_{A_i}$$

KROK 2 - protože B_i je samoadjungovaný a V_i je konečně-dimenzionální

$$\|B_i\|_{A_i} \overset{def}{=} \sup_{v \in V_i \setminus \{0\}} \frac{\|B_i v\|_{A_i}}{\|v\|_{A_i}} = \sup_{v \in V_i \setminus \{0\}} \frac{|(B_i v, v)_{A_i}|}{\|v\|_{A_i}^2}$$

DŮKAZ NA ZVLÁŠTNÍM PAPÍRE

STACK EXCHANGE - "Prove rayleigh quotient = operator norm without referring to eigenvalues"

KROK 3 – (indukcí) dokážeme nerovnost

$$((**)) \qquad 0 \le \frac{(B_i v, v)_{A_i}}{(v,v)_{A_i}} \le \varepsilon := \frac{1}{1+c^*} \qquad \forall v \in V_i \setminus \{0\}$$

$B_0 = 0 \Rightarrow$ nerovnost platí pro libovolné ~~[illegible]~~ c^*

Nechť (**) platí pro B_{i-1}. Potom

$$B_i = J_i^* \left(I - I_{i-1}^i (I - B_{i-1}) A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i\right) J_i = J_i^* Q_i J_i + J_i^* I_{i-1}^i B_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i$$

$$(B_i v, v)_{A_i} = \cancel{(A_i J_i v, J_i v)}$$

$$I_{i-1}^i$$

$$(A_i J_i^* Q_i J_i v, v)_i + (A_i J_i^* B_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i v, v)_i$$

$$= (A_i Q_i J_i v, J_i v)_i + (B_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i v, R_i^{i-1} A_i J_i v)_i$$

$$= (Q_i J_i v, J_i v)_{A_i} + \left((B_{i-1} A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i v), A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i v\right)_{A_{i-1}}$$

$$\Rightarrow 0 \le (B_i v, v)_{A_i} \le (Q_i J_i v, J_i v)_{A_i} + \varepsilon \left(R_i^{i-1} A_i J_i v, A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i J_i v\right)_i$$

$$Q_i = I - I_i^{i-1} A_{i-1}^{-1} R_{i-1} A_i$$

$$= (1-\varepsilon)(Q_i J_i v, J_i v)_{A_i} + \varepsilon (J_i v, J_i v)_{A_i}$$

$\downarrow$ Q_i je samoadj. projekce viz další strana

$$((\square)) \qquad = (1-\varepsilon)\|(Q_i J_i v)\|_{A_i}^2 + \varepsilon \|J_i v\|_{A_i}^2$$

z konvergenčního kritéria (*)

~~z [illegible] předpokladu [illegible]~~

$$((\nabla)) \qquad (1-\varepsilon)\|Q_i J_i v\|_{A_i}^2 \le \frac{1-\varepsilon}{c^*}\|v\|_{A_i}^2 - \left(\frac{1-\varepsilon}{c^*}\right)\|J_i v\|_{A_i}^2$$

(protože $\varepsilon = \frac{1}{1+c^*}$, $(1+c^*)\varepsilon = 1$, $\varepsilon + \varepsilon c^* = 1$, $\varepsilon c^* = 1-\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{1-\varepsilon}{c^*}$)

dostáváme z $(\square)$ a (∇)

$$0 \le (B_i v, v)_{A_i} \le \varepsilon \|v\|_{A_i}^2 - \varepsilon\|J_i v\|_{A_i}^2 + \varepsilon\|J_i v\|_{A_i}^2 = \varepsilon \cdot \|v\|_{A_i}^2 \qquad \square$$