JJ

podle [Shaidurov 1995]

ABSTRAKTNÍ POPIS MULTIGRIDU A KONVERGENCE

Abstraktní popis

Mějme:
- posloupnost konečně-dimenzionálních prostorů
  $M_0, M_1, \dots, M_\ell$
  se skalárními součiny $(\cdot,\cdot)_i$ na M_i, $i=0,1,\dots,\ell$
- interpolační operátory
  $I_i^{i+1} : M_i \to M_{i+1}$ $\quad i=0,1,\dots,\ell-1$
- operátory restrikce
  $R_i^{i-1} : M_i \to M_{i-1}$ $\quad i=1,2,\dots,\ell$
- invertovatelné operátory
  $A_i : M_i \to M_i$ $\quad i=0,1,\dots,\ell$
- vyhlazovače (lineární operátory)
  $D_{i,l}^{PRE}, D_{i,j}^{POST} : M_i \to M_i$ $\quad i=\cancel{0},1,2,\dots,\ell,\ l=1,2,\dots,m_1$
  $j=1,2,\dots,m_2$

Řešíme úlohu, $f_\ell \in M_\ell$, hledáme $u_\ell \in M_\ell$ tak, že

$$A_\ell u_\ell = f_\ell$$

Definujeme MG_i-algoritmus pro počáteční aproximaci v_0 a pravou stranu g_i pro aproximaci problému

$$A_i v_i = g_i$$

POUŽÍVÁME ZELENÉ ZNAČENÍ (horní index místo dolních)

<u>MG_i-algoritmus</u> $\quad v_1^{(1)} = MG_i(v_0^{(0)}, g_i)$

je-li $i=0$: $\quad v_1^{(1)} = A_0^{-1} g_i$, jinak

(A1) "presmoothing" $\quad v_0^{(0)} := v_0^{(0)}$

$$v_l^{(l)} = v_{l-1}^{(l-1)} + D_{i,l}^{PRE}\left(g_i - A_i v_l^{(l-1)}\right) \qquad l=1,2,\dots,m_1$$

(A2) "restrikce"

$$g_{i-1} = R_i^{i-1}\left(g_i - A_i v_{m_1}^{(m_1)}\right)$$

(A3) „řešení na hrubé síti" $\tilde{w}_0^{(0)} := 0 \in \Pi_{i-1}$ a p-krát opakuj

$$\tilde{w}_s^{(s)} = MG_{i-1}(\tilde{w}_{s-1}^{(s-1)}, g_{i-1}) \qquad s = 1,2,\dots,p$$

(A4) „korekce"

$$y_0^{(0)} = v_{m_1} + I_{i-1}^{i}\, \tilde{w}_p^{(p)}$$

(A5) „postsmoothing"

$$y_j^{(j)} = y_{j-1}^{(j-1)} + D_{i,j}^{POST}(g_i - A_i y_{j-1}^{(j-1)}) \qquad j = 1,2,\dots, m_2$$

nakonec položíme $w_1^{(1)} = MG_i(w_0^{(0)}, g_i) := y_{m_2}^{(m_2)}$

jak se ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ mění chyba

nechť $e_0^{(0)} := v_i - w_0^{(0)}$

$e_1^{(1)} := v_i - w_1^{(1)}$ chyba v $MG_i(w_0^{(0)}, g_i)$ pro $A_i v_i = g_i$

nadefinujeme operátor $B_i : e_0^{(0)} \mapsto e_1^{(1)}$ B_i… error supression operator

dále značíme

$$J_i^{(m_1)} := (I - D_{i,m_1}^{PRE} A_i)(I - D_{i,m_1-1}^{PRE} A_i)\cdots(I - D_{i,1}^{PRE} A_i)$$

$$J_i^{(m_2)} := (I - D_{i,m_2}^{POST} A_i)\cdots(I - D_{i,1}^{POST} A_i)$$

- viděli jsme, že chyba pro stacionární iterační metody splňuje

$$e^{(i+1)} = (I - DA)\, e^{(i)}$$

chyba pro korekci na hrubé síti

$$e^{(i+1)} = (I - I_0^1 A_0^{-1} R_1^0 A_1)\, e^{(i)}$$

v předchozím značení

dáme-li toto dohromady, dostaneme (pro 2-úrovňovou metodu)

$$B_1 = J_1^{(m_2)}(I - I_0^1 A_0^{-1} R_1^0 A_1) J_1^{(m_1)}$$

jak to bude vypadat na ~~[illegible]~~ jemnějších sítích ?

Na jemnějších sítích $(i>1)$

- zhlazování zůstane (až na indexy stejné)
- změní se část odpovídající korekci na hrubé síti

$$B_i = J_i^{(m_2)} \boxed{\text{NĚCO}} J_i^{(m_1)}$$

tady asi bude nějak i B_{i-1}

Co se děje s chybou v krocích (A2)-(A4)?

- po (A1) máme $v_{m_1}^{(m_1)} \approx v_i$ s chybou $\sigma_{m_1}^{(m_1)} := v_i - v_{m_1}^{(m_1)}$

- v (A2) restrikci

$$g_{i-1} = R_i^{i-1}\left(g_i - A_i v_{m_1}^{(m_1)}\right) = R_i^{i-1} A_i \sigma_{m_1}^{(m_1)}$$

označíme $\tilde{w}_* := A_{i-1}^{-1} R_i^{i-1} A_i \sigma_{m_1}^{(m_1)} = A_{i-1}^{-1} g_{i-1}$

- řešení na hrubé síti (A3)

začínáme s nulovou aproximací $\Rightarrow$ chyba $= \tilde{w}_*$

po jedné aplikaci MG_{i-1} dostáváme chybu $B_{i-1}\tilde{w}_*$

a $\tilde{w}_1^{(1)} = \tilde{w}_* - (\tilde{w}_* - \tilde{w}_1^{(1)}) = \tilde{w}_* - B_{i-1}\tilde{w}_*$

po γ krocích MG_{i-1} pak dostáváme

$$\tilde{w}_\gamma^{(\gamma)} = \tilde{w}_* - B_{i-1}^{\gamma}\tilde{w}_* = \left(I - B_{i-1}^{\gamma}\right)\tilde{w}_*$$

- v korekci (A4)

$$y_0^{(0)} = v_{m_1}^{(m_1)} + I_{i-1}^{i}\tilde{w}_\gamma^{(\gamma)}$$

$$\Rightarrow \quad v_i - y_0^{(0)} = \left(v_i - v_{m_1}^{(m_1)}\right) - I_{i-1}^{i}\tilde{w}_\gamma^{(\gamma)}$$

$$= \sigma_{m_1}^{(m_1)} - I_{i-1}^{i}\left(I - B_{i-1}^{\gamma}\right)\tilde{w}_*$$

$$= \left(I - I_{i-1}^{i}\left(I - B_{i-1}^{\gamma}\right)A_{i-1}^{-1}R_i^{i-1}A_i\right)\sigma_{m_1}^{(m_1)}$$

$$\Rightarrow \quad B_i = J_i^{(m_2)}\left(I - I_{i-1}^{i}\left(I - B_{i-1}^{\gamma}\right)A_{i-1}^{-1}R_i^{i-1}A_i\right)J_i^{(m_1)},$$

kde $B_0 = 0$

vlastnosti B_i:

- jestliže A_i, I_i^{i+1}, R_{i+1}^{i}, $D_{i,l}^{pre}$, $D_{i,j}^{post}$ jsou lineární, B_i je lineární
- nezávisí na g_i, ani w_0

důkaz konvergence multigridu

postačující podmínka: $\rho(B_i) < 1$

pro každou (generovanou) maticovou normu $\rho(B_i) \leq |||B_i|||$

↳ ukážeme, že $|||B_i||| < 1$ (resp. $\exists$ $|||B_i||| \leq 1-\varepsilon$ pro $\varepsilon > 0$)

pro nějakou vhodnou normu

Pak: $|||B_i||| < 1 \Rightarrow \rho(B_i) < 1 \Rightarrow (B_i)^j e_0 \to 0 \quad \forall w_0, g_i$